

§5. Dvojice úhlů

Def.: Dva úhly nazýváme vedlejší, jsou-li ve styčné poloze, mají-li jedno rameno společné a jejich součtem je přímý úhel (jejich sjednocením je polorovina).

V.5.1.: Součet každých dvou vedlejších úhlů je 180° .

$$\begin{aligned} \text{[Dk.: } \overrightarrow{VB} \text{ prochází mezi rameny } \sphericalangle AVC \Rightarrow |\sphericalangle AVB| + |\sphericalangle BVC| &= |\sphericalangle AVC| \text{ - přímý} \\ \Rightarrow |\sphericalangle AVC| &= 180^\circ \text{]} \end{aligned}$$

Důsledek V.5.1.: Jsou-li dva úhly shodné, jsou shodné i jejich úhly vedlejší.

Def.: Dva úhly (ne nulové ani přímé) nazýváme vrcholové, jestliže ramena jednoho jsou opačné polopřímky ramen druhého úhlu.

V.5.2.: Každé dva vrcholové úhly jsou shodné.

$$\left. \begin{aligned} \text{[Dk.: } \alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \beta + \gamma &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha - \beta = 180^\circ - 180^\circ \Rightarrow \alpha = \beta \text{]}$$

Důsledek V.5.2.: Osy vedlejších úhlů jsou k sobě kolmé.

Pozn.: Vedlejší i vrcholový úhel k pravému úhlu je pravý úhel.

Def.: Dva úhly nazýváme doplňkové, resp. výplňkové, jestliže jejich součtem je pravý, resp. přímý úhel.

Pozn.: Všechny vedlejší úhly jsou výplňkové, ale výplňkové úhly nemusí být úhly vedlejší.

Def.: Dvě polopřímky, ležící na téže přímce, nazýváme souhlasnými, jestliže jedna z nich je podmnožinou druhé. V opačném případě je nazveme nesouhlasnými.

Def.: Necht' přímka p je prot'ata přímkami a, b po řadě v různých bodech A, B . Každou dvojici úhlů s vrcholy A, B nazveme:

a) souhlasné úhly, jestliže platí:

1. úhly leží v téže polorovině s hranicí p .
2. ramena úhlů ležící na p jsou souhlasné polopřímky.

b) střídavé úhly, jestliže platí:

1. úhly leží na opačných polorovinách s hranicí p .
2. ramena úhlů ležící na p jsou nesouhlasné polopřímky.

c) přilehlé úhly, jestliže platí:

1. úhly leží v téže polorovině s hranicí p .
2. ramena úhlů ležící na p jsou nesouhlasné polopřímky, jejichž průnikem je úsečka AB .

V.5.3: Necht' přímka p je prořazena přímkami a, b po řadě v různých bodech A, B . Pak platí:

- a) souhlasné úhly s vrcholy A, B jsou shodné $\Leftrightarrow$ přímky a, b jsou rovnoběžné
- b) střídavé úhly s vrcholy A, B jsou shodné $\Leftrightarrow$ přímky a, b jsou rovnoběžné
- c) přilehlé úhly s vrcholy A, B jsou výplňkové $\Leftrightarrow$ přímky a, b jsou rovnoběžné.

[Dk.: využívá také větu o velikosti vnějších úhlů trojúhelníku vzhledem k úhlům vnitřním (V.6.3.).

a) 1., $\Rightarrow$: sporem: Necht' $\alpha = \beta \wedge a \nparallel b \Rightarrow \exists P \in a \cap b \Rightarrow \exists \triangle ABP$.

Vždy je jeden z dvojice souhlasných úhlů vnějším úhlem a druhý vnitřním úhlem $\triangle ABP$. Protože vnější úhel v trojúhelníku je větší než vnitřní úhel u jiného vrcholu, platí, že $\alpha \neq \beta$ - spor.

2., $\Leftarrow$: sporem: Necht' $a \parallel b \wedge \alpha \neq \beta$. Sestrojíme úhel α' s jedním ramenem na p a vrcholem B v téže polorovině jako úhel β tak, že $\alpha = \alpha'$. Protože $\alpha = \alpha'$ a jsou souhlasné, platí, že $a \parallel q$. Tedy bodem B ^{vedeme} dvě různé rovnoběžky b, q s přímkou a - spor. $\nexists$

b) plyne z a) a V.5.2., neboť střídavý úhel k danému úhlu je úhel vrcholový k úhlu souhlasnému s daným úhlem.

c) plyne z a), V.5.1. a definice výplňkových úhlů, neboť přilehlý úhel k danému úhlu je úhel vedlejší k úhlu souhlasnému s daným úhlem.]

§6. Trojúhelník, úhly v trojúhelníku

Pozn.: Trojúhelník jsme si definovali v §3 jako průnik tří polorovin.

Větu *sus* o shodnosti trojúhelníků jsme si zavedli jako axiom shodnosti (A_{13}) v §4.

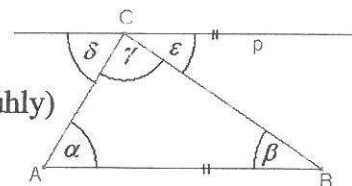
Def.: Necht' ABC je trojúhelník. Vnitřním úhlem trojúhelníku ABC při vrcholu A nazýváme $\sphericalangle BAC$, vnějším úhlem $\triangle ABC$ při vrcholu A pak libovolný úhel vedlejší k úhlu $\sphericalangle BAC$ (k úhlu vnitřnímu).

V.6.1: Součet libovolných dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než 180° .

[Dk.: Ukážeme, že $\beta + \gamma < 180^\circ$: Označme $A_1 = B \dot{-} C$. Na polopřímce $\overrightarrow{AA_1}$ sestrojíme bod D tak, aby $A_1 = A \dot{-} D \mid \xrightarrow{|AA_1|=|BA_1|} \triangle AA_1C \cong \triangle DA_1B$ (*sus*)
(dále $|CA_1| = |BA_1|$, neboť $A_1 = B \dot{-} C$, úhly u vrcholu A_1 jsou vrcholové)
 $\Rightarrow \gamma = \beta_1$. Platí: $\sphericalangle ABD = \beta + \beta_1$, $\sphericalangle ABD$ není přímý, protože $D \notin \overrightarrow{AB}$,
 $D \in \overrightarrow{ABA_1} \Rightarrow |\sphericalangle ABD| < 180^\circ \Rightarrow \beta + \beta_1 = \beta + \gamma < 180^\circ$.]

V.6.2: Součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° .

[Dk.: Sestrojíme $p \parallel AB$, $C \in p$.
 $\alpha = \delta$ (střídavné úhly) $\wedge \beta = \varepsilon$ (střídavné úhly)
 $\delta + \gamma + \varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.]



Důsledek V.6.2.: V každém trojúhelníku existují alespoň dva ostré úhly. (Každý trojúhelník má nejvýše jeden úhel tupý nebo nejvýše jeden úhel pravý.)

V.6.3: V každém trojúhelníku je vnější úhel při vrcholu A větší než kterýkoliv z vnitřních úhlů u vrcholů B nebo C .

[Dk.: Podle V.6.1. je $\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow \beta < 180^\circ - \alpha$
 $\alpha' = 180^\circ - \alpha$... vedlejší úhel $\} \Rightarrow \beta < \alpha'$,
analogicky pro úhel γ .]

V.6.4: V každém trojúhelníku je velikost ^{vnitřního} úhlu při jednom vrcholu rovna součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících dvou vrcholů.

[Dk.: $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ (úhly vedlejší) $\} \alpha' = \beta + \gamma$.]
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

V.6.5: Věta usu o shodnosti trojúhelníků:

Necht' pro $\triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle A_2 B_2 C_2$ platí:

$$|A_1 B_1| = |A_2 B_2| \wedge |\sphericalangle C_1 A_1 B_1| = |\sphericalangle C_2 A_2 B_2| \wedge |\sphericalangle A_1 B_1 C_1| = |\sphericalangle A_2 B_2 C_2|.$$

Pak platí: $\triangle A_1 B_1 C_1 \cong \triangle A_2 B_2 C_2$.

[Dk.: 1. Necht' $|A_1 C_1| = |A_2 C_2| \Rightarrow$ shodnost plyne z vety *sus* (A_{13}).

2. Necht' $|A_1 C_1| \neq |A_2 C_2|$. Necht' např. $|A_1 C_1| > |A_2 C_2|$.

Sestrojme na $A_1 C_1$ bod X tak, aby $|A_1 X| = |A_2 C_2|$. Protože

$$|A_1 X| < |A_1 C_1| \Rightarrow X \mu A_1 C_1, \triangle A_1 B_1 X \cong \triangle A_2 B_2 C_2 \text{ (usu)} \Rightarrow \overrightarrow{B_1 X}$$

prochází mezi rameny $\sphericalangle A_1 B_1 C_1 \Rightarrow$ úhly $\sphericalangle A_1 B_1 X$, $\sphericalangle X B_1 C_1$ jsou ve styčné poloze $\Rightarrow |\sphericalangle A_1 B_1 X| < |\sphericalangle A_1 B_1 C_1|$ - spor.]

Def.:

- Trojúhelník ABC se nazývá rovnoramenný, jestliže alespoň dvě jeho strany jsou shodné úsečky.
Jestliže $|AC| = |BC|$, nazývají se úsečky AC , BC ramena $\triangle ABC$, úsečka AB jeho základna, vrchol C hlavní vrchol $\triangle ABC$.
- Trojúhelník ABC se nazývá rovnostanný, jestliže všechny tři jeho strany jsou shodné úsečky.
- Trojúhelník ABC se nazývá pravoúhlý, jestliže je jeden jeho vnitřní úhel pravý.
Je-li úhel při vrcholu C pravý, nazývá se strana AB přepona, strany AC , BC odvěsny $\triangle ABC$.

V.6.6.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: $\triangle ABC$ je rovnoramenný se základnou

$$AB \Leftrightarrow |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC|.$$

[Dk.: 1., $\Rightarrow$ " : Necht' $\triangle ABC$ je rovnoramenný, AB -základna
 $\Rightarrow |AC| = |BC| \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC$ (*sus*) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC|$.

2., $\Leftarrow$ " : Necht' $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC$ (*usu*) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow |AC| = |BC| \Rightarrow \triangle ABC$ je rovnoramenný.]

V.6.7.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: $\triangle ABC$ je rovnostanný $\Leftrightarrow |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 60^\circ$.

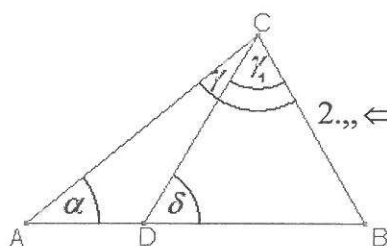
[Dk.: 1., $\Rightarrow$ " : Necht' $\triangle ABC$ je rovnostanný $\Rightarrow$
 $|AC| = |BC| \wedge |BC| = |AB| \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC$ (*sus*) $\wedge \triangle BAC \cong$
 $\cong \triangle ACB$ (*sus*) $\Rightarrow |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| \wedge |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB|$. Protože součet těchto tří
Úhlů je 180° , musí být každý 60° .

2., „ $\Leftarrow$ “: Necht' $|\angle ABC| = |\angle BAC| = |\angle ACB| = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC \cong \triangle ACB$ (*usu*) (možno opět rozepsat po dvojicích trojúhelníků) $\Rightarrow |AC| = |BC| = |AB| \Rightarrow \triangle ABC$ je rovnostranný.]

Pozn.:

- Rovnostranný trojúhelník je zvláštním případem rovnoramenného trojúhelníku.
- V každém pravoúhlém trojúhelníku je přepona větší než jakákoliv odvěsna.

V.6.8: Necht' je dán $\triangle ABC$. Pak platí: $|AB| > |BC| \Leftrightarrow |\angle BCA| > |\angle CAB|$, tj. platí: proti větší straně leží větší úhel, proti menší straně leží menší úhel a naopak proti většímu úhlu leží větší strana, proti menšímu úhlu leží menší strana.



[Dk.: 1., „ $\Rightarrow$ “:

Necht' $|AB| > |BC|$. Sestrojme $D \in AB$ tak, že $|BD| = |BC|$.

$D \mu AB \Rightarrow \gamma_1 < \gamma$

$\triangle BCD$ je rovnoramenný $\Rightarrow \gamma_1 = \delta$ } $\Rightarrow \alpha < \delta = \gamma_1 < \gamma \Rightarrow$
 δ - vnější úhel $\triangle ADC \Rightarrow \alpha < \delta$ } $\Rightarrow \alpha < \gamma$

2., „ $\Leftarrow$ “:

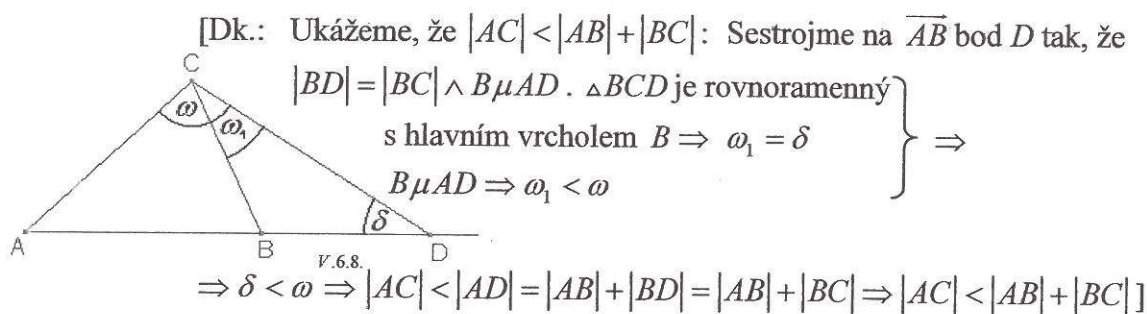
Necht' $\gamma > \alpha$. Sporem-necht' $|AB| \leq |BC|$.

Je-li $|AB| = |BC|$, je $\triangle ABC$ rovnoramenný s hlavním vrcholem $B \Rightarrow \alpha = \gamma$ - spor.

Je-li $|AB| < |BC|$ ^{1., „ $\Rightarrow$ “} $\Rightarrow \gamma < \alpha$ - spor.]

V.6.9.: Trojúhelníková nerovnost:

V každém $\triangle ABC$ platí: součet délek libovolných dvou stran je větší než strana třetí.



Pozn.: Platí i obrácené tvrzení: Jsou-li dány tři úsečky o délkách a, b, c tak, že součet každých dvou z nich je větší než zbývající, pak existuje trojúhelník se stranami a, b, c .

Důsledek V.6.9.: Pro každé tři body $A, B, C \in E_2$ platí:

$|AB| \leq |AC| + |BC|$, přičemž $|AB| = |AC| + |BC| \Leftrightarrow C \in AB$ (tedy body A, B, C jsou kolineární).

Def.: Necht' je dán $\triangle ABC$.

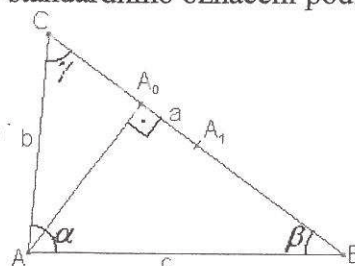
- Střední příčka trojúhelníka nazýváme úsečku spojující středy dvou stran trojúhelníka.
- Těžnici trojúhelníka nazýváme úsečku spojující vrchol trojúhelníka se středem protější strany.
- Výšku trojúhelníka nazýváme úsečku procházející vrcholem trojúhelníka, která je kolmá na přímkou, na níž leží protější strana trojúhelníka.

Pozn.: Někdy se uvedenými pojmy označují i přímky, na nichž dané úsečky leží.

Pozn.: Necht' je dán $\triangle ABC$. Pak budeme užívat následujícího standardního označení podle obrázku:

$$A_1 = B \div C \Rightarrow t_a = AA_1$$

$$A_0 \in \overline{BC} \text{ tak, že } \overline{AA_0} \perp \overline{BC} \Rightarrow v_a = AA_0$$



V.6.10.: Střední příčka každého trojúhelníka je rovnoběžná s protilehlou stranou a má velikost rovnu polovině této strany.

[Dk.: viz §8 o čtyřúhelnících.]

V.6.11.: Necht' je dán $\triangle ABC$. Všechny tři těžnice se protínají v jednom bodě T a platí:
 $|AT| : |A_1T| = 2 : 1$, kde $A_1 = B \div C$.

[Dk.: viz §8 o čtyřúhelnících.]

Def.: Průsečík těžnic trojúhelníka se nazývá těžiště trojúhelníka.

Pozn.: Také všechny tři výšky každého trojúhelníka se protínají v jednom bodě (tento bod se nazývá ortocentrum), který u tupouhlého trojúhelníku leží vně trojúhelníku a u pravouhlého trojúhelníku ve vrcholu, při němž je pravý úhel.

V.6.12.: Necht' $\triangle ABC$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB . Pak platí: těžnice t_c splývá s výškou v_c a s osou úhlu $\sphericalangle ACB$

[Dk.: Necht' $t_c = CC_1$, kde $C_1 = A \div B$.

$\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ (sus), neboť $|AC| = |BC|$... ramena trojúhelníku

$|AC_1| = |BC_1|$... viz. definice středu úsečky

$\sphericalangle CAC_1 = \sphericalangle CBC_1$... podle V.6.6.

$$\text{a) } \sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BC_1C = 90^\circ \Rightarrow CC_1 = v_c$$

$$\text{b) } \sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1 \Rightarrow CC_1 \dots \text{osa úhlu } \sphericalangle ACB]$$

V.6.13.: Věta sss o shodnosti trojúhelníků:

Nechť pro $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ platí: $|A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |B_1C_1| = |B_2C_2| \wedge |A_1C_1| = |A_2C_2|$. Pak platí: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

V.6.14: Věta Ssu o shodnosti trojúhelníků:

Nechť pro $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ platí: $|A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |B_1C_1| = |B_2C_2| \wedge |A_1B_1| > |B_1C_1| \wedge \angle B_1C_1A_1 = \angle B_2C_2A_2$. Pak platí: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

§7. Podobnost trojúhelníků, Euklidovy věty, Pythagorova věta

Def.: Trojúhelníky $\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2$ jsou podobné (zapisujeme $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$), jestliže

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ : k = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|}, \text{ číslo } k\text{-koeficient (poměr) podobnosti.}$$

Pozn.: Shodnost je podobnost pro $k = 1$.

V.7.1.: Věta uu o podobnosti trojúhelníků:

Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, jsou podobné.

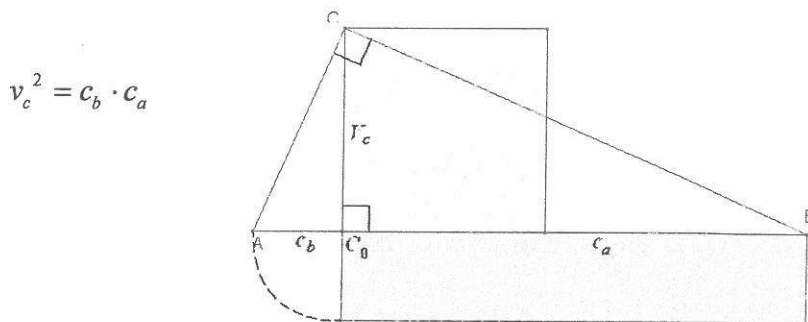
V.7.2.: Věta sus o podobnosti trojúhelníků:

Shodují-li se dva trojúhelníky v poměru dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

V.7.3.: Euklidova věta o výšce:

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , pak platí:

Obsah čtverce nad výškou na přeponu je roven obsahu obdélníka o stranách rovných úsekům na přeponě oddělených touto výškou.



[Dk.: $\triangle ACC_0 \sim \triangle CBC_0$ (uu), neboť $\sphericalangle C_0CB$ je otočením $\sphericalangle C_0AC$

$$\frac{|CC_0|}{|AC_0|} = \frac{|BC_0|}{|CC_0|} \quad \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \quad v_c^2 = c_b \cdot c_a]$$

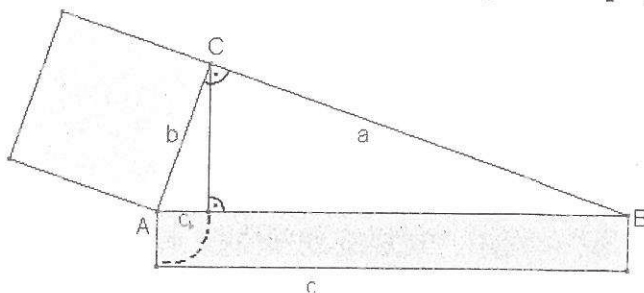
V.7.4.: Euklidovy věty o odvěsnách:

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB , pak platí:

Obsah čtverce nad odvěsnou je roven obsahu obdélníka o stranách rovných přeponě a úseku na přeponě přilehlému k této odvěsně odděleného výškou na přeponu.

$$b^2 = c \cdot c_b$$

$$a^2 = c \cdot c_a$$

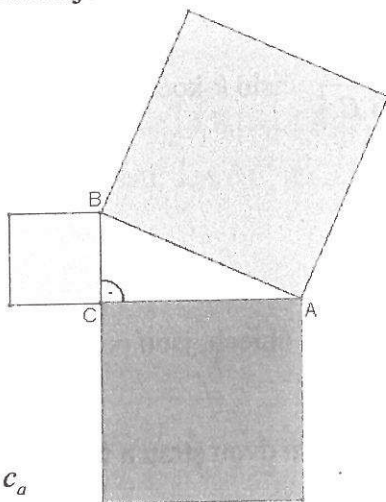


V.7.5.: Pythagorova věta:

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , pak platí:

Obsah čtverce nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$\begin{aligned} \text{[Dk.: } a^2 &= c \cdot c_a \\ b^2 &= c \cdot c_b \\ \hline a^2 + b^2 &= c(c_a + c_b) \\ a^2 + b^2 &= c \cdot c \\ \boxed{a^2 + b^2} &= \boxed{c^2} \quad] \end{aligned}$$

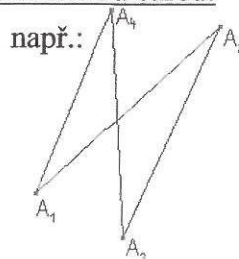
Pozn.: Všechny tři věty platí i obráceně:

Pokud v trojúhelníku platí:

$$(c^2 = c_b \cdot c_a) \vee (a^2 = c \cdot c_a) \vee (b^2 = c_b \cdot c) \vee (a^2 + b^2 = c^2) \Rightarrow \triangle ABC \text{ je pravoúhlý.}$$

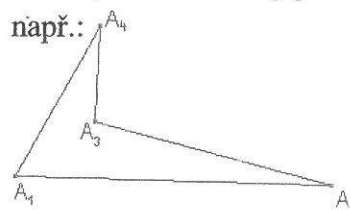
§8. Čtyřúhelníky

Def.: Necht' $A_1, A_2, A_3, A_4 \in E_2$ jsou čtyři body, z nichž žádné tři nejsou lineární. Sjednocení úseček $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_4 \cup A_4A_1$ nazveme uzavřenou lomenou čarou. (označme $A_1A_2A_3A_4$)



Def.: Necht' $A_1A_2A_3A_4A_1$ je uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná, pak čtyřúhelníkem $A_1A_2A_3A_4$ nazveme sjednocení této lomené čáry s množinou jejích vnitřních bodů.

Body A_1, A_2, A_3, A_4 se nazývají vrcholy, uzavřená lomená čára $A_1A_2A_3A_4A_1$ obvodem, každá úsečka se nazývá stranou a úsečky A_1A_3, A_2A_4 se nazývají úhlopříčky čtyřúhelníku.



Pozn.:

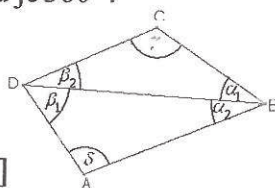
- Konvexní čtyřúhelník bychom mohli definovat jako průnik čtyř polorovin.
- Úhlopříčky AC, BD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají ve vnitřním bodě čtyřúhelníku, tedy konvexní čtyřúhelník lze chápat jako sjednocení čtyř nepřekrývajících se trojúhelníků $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CDP, \triangle DAP$, kde P je průsečík úhlopříček.

V.8.1.: Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 360° .

$$[\text{Dk.: } \delta + \beta_1 + \alpha_2 = 180^\circ$$

$$\gamma + \beta_2 + \alpha_1 = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ]$$



V.8.2.: Součet vnějších úhlů konvexního čtyřúhelníku je 360° , počítáme-li u každého vrcholu právě jeden.

[Dk.: Podle definice vnějších úhlů jde o vedlejší úhel k úhlu vnitřnímu. Tedy vnější + vnitřní = 180° . Pokud u každého vnitřního úhlu použijeme pouze jeden vnější úhel, tak součet vnějších a vnitřních úhlů čtyřúhelníku je $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku se rovná 360° , tedy součet vnějších úhlů se rovná $720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.]

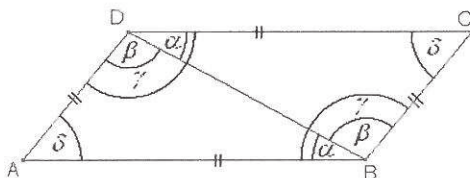
Def.: Necht' $ABCD$ je čtyřúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné, pak ho nazveme rovnoběžníkem.

Pozn.: Každý rovnoběžník je konvexní čtyřúhelník.

V.8.3.: Necht' $ABCD$ je rovnoběžník, pak platí:

- 1) $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |AD|$
- 2) Protilehlé úhly jsou shodné.

[Dk.:



$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (usu, neboť dvě dvojice střídavých úhlů a jedna společná strana $\Rightarrow$ 1) $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |AD|$

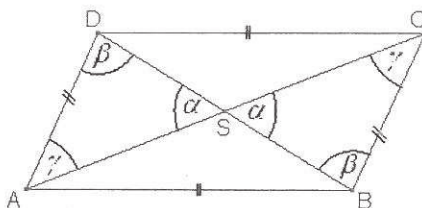
$$2) \quad \alpha + \beta = \alpha + \beta \quad \alpha + \beta = \gamma$$

$$\underline{\gamma = \gamma} \quad \underline{\delta = \delta} \quad (\text{podle podobnosti}).]$$

V.8.4.: Necht' $ABCD$ je rovnoběžník, pak platí:

$S = A \div C = B \div D$, jestliže $S \in AC \cap BD$, tedy úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí.

[Dk.:



$\triangle ASD \cong \triangle CSB$ (usu, neboť dvě dvojice střídavých úhlů a jedna stejná strana.

$$|AS| = |CS| \quad |AS| + |CS| = |AC| \Rightarrow S = A \div C$$

$$|BS| = |DS| \quad |BS| + |DS| = |BD| \Rightarrow S = B \div D]$$

V.8.5.: Necht' $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, pak platí:

- 1) $|AB| = |CD| \wedge AB \parallel CD \Leftrightarrow ABCD$ je rovnoběžník
- 2) $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |DA| \Leftrightarrow ABCD$ je rovnoběžník

[Dk.: 1) a) „ $\Rightarrow$ “: $|AB| = |CD| \wedge AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ rovnoběžník.

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (sus) $\Rightarrow |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBC| \Rightarrow ABCD$ je rovnoběžník.

b) „ $\Leftarrow$ “: $ABCD$ je rovnoběžník $\Rightarrow |AB| = |CD| \wedge AB \parallel CD$ z definice.

2) analogicky]

Def.: Čtyřúhelník, jehož všechny čtyři úhly jsou pravé, se nazývá pravoúhelník.

V.8.6.:

- 1) Každý pravoúhelník je rovnoběžník.
- 2) Úhlopříčky pravoúhelníku jsou shodné.

[Dk.: 1) $AB \parallel CD$ je zřejmé $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (usu) $\Rightarrow |AB| = |CD| \Rightarrow ABCD$ je rovnoběžník.

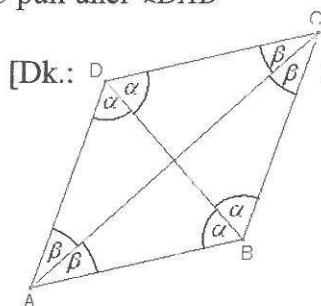
2) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (sus) $\Rightarrow |BD| = |AC|$]

Def.:

- 1) Rovnoběžník $ABCD$ se nazývá kosočtvercem, jestliže $|AB| = |BC|$ a žádný vnitřní úhel není pravý.
- 2) Rovnoběžník $ABCD$ se nazývá kosodélníkem, jestliže $|AB| \neq |BC|$ a žádný vnitřní úhel není pravý.

V.8.7.: Necht' $ABCD$ je kosočtverec, pak platí:

- 1) $AC \perp BD$
- 2) AC půlí úhel $\sphericalangle DAB$



[Dk.: 1) $\beta = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| \dots$ stříd.
 $\beta = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| \dots \triangle ABC$ je rr
 $\beta = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DAC| \dots$ stříd. } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CBS \cong \triangle CDS \cong \triangle ADS$ (usu) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle DSC| = |\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle ASB| = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \perp BD$

2) $\left. \begin{array}{l} |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| \\ |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DAC| \end{array} \right\} \Rightarrow |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC| \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC \text{ půlí úhel } \sphericalangle DAB$]

Def.: Pravoúhelník $ABCD$ nazýváme a) čtvercem, jestliže $|AB| = |BC|$;

b) obdélníkem, jestliže $|AB| \neq |BC|$.

Pozn.: Pro čtverec platí analog. věta jako pro kosočtverec (V.8.7.)

Pozn.: Velmi často se kosočtverec považuje za zvláštní případ kosodélníku, čtverec za zvláštní případ obdélníku, někdy dokonce obdélník za zvláštní případ kosodélníku a čtverec za zvláštní případ kosočverce. Tedy čtverec má všechny vlastnosti kosočverce a obdélníku.

Def.: Konvexní čtyřúhelník $ABCD$, kde $AB \parallel CD \wedge BC \nparallel DA$, nazveme lichoběžníkem.
Strany AB a CD nazveme základnami a strany BC a DA rameny lichoběžníka.

Def.:

- 1) Lichoběžník $ABCD$ se nazývá rovnoramenný, jestliže $|BC| = |DA|$.
- 2) Necht' $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB a CD a necht' $E = B \dot{-} C$, $F = D \dot{-} A$.
Pak úsečka EF se nazývá střední příčka lichoběžníka $ABCD$.

V.8.8.: Necht' $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB a CD a necht' EF je jeho střední příčka.
Pak platí:

- 1) $EF \parallel AB (\parallel CD)$;
- 2) $|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.

[Dk.: 1) Necht' $E = B \dot{-} C$; vedeme přímkou $\overline{EH}$ bodem $E, \overline{GH} \parallel DA \Rightarrow \triangle GBE \cong \triangle HCE$ (usu) $\Rightarrow AGEF$ je rovnoběžník a $EF \parallel AB$

2) $|AB| = |EF| + x; |DC| = |EF| - x \Rightarrow |AB| + |DC| = 2|EF| \Rightarrow$
 $\Rightarrow |EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$]

§9. Mnohoúhelníky

Pozn.: Uzavřená lomená čára $A_1A_2\dots A_nA_1$, která leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá mnohoúhelník nebo také n -úhelník.

Pozn.: Necht' je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a n různých polopřímek $SX_1, SX_2, \dots, SX_n$ kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, přičemž pro tyto polopřímky platí:

$|\sphericalangle X_1SX_2| = |\sphericalangle X_2SX_3| = \dots = |\sphericalangle X_{n-1}SX_n| = \frac{360^\circ}{n} = \omega$. Označme $A_1, A_2, \dots, A_n$ průsečíky daných polopřímek s danou kružnicí k . Pravidelný mnohoúhelník $A_1A_2\dots A_n$ je pak sjednocením všech trojúhelníků $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, \dots, \triangle SA_nA_1$. Všechny tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné. Úsečka, jejímiž krajními body jsou dva nesousední vrcholy trojúhelníků, se nazývá úhlopříčka.

V.9.1.: Každý konvexní n -úhelník má $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

Pozn.: Každé dvě sousední strany určují vnitřní úhel pravidelného mnohoúhelníku.

Pozn.: Úhly ω mezi úsečkami spojujícími dva sousední vrcholy se středem mnohoúhelníka se nazývají středové úhly.

V.9.2.: Necht' $A_1A_2\dots A_n$ je pravidelný n -úhelník, pak platí, že součet vnitřních úhlů daného n -úhelníka je roven $180^\circ(n-2)$.

§10. Kružnice, kruh

Def.: Necht' $S \in E_2$, $r \in \mathbb{R}^+$.

Kružnicí k se středem S a poloměrem r nazýváme množinu všech bodů $X \in E_2$, kde $|SX| = r$. Zapišeme $k(S; r) = \{X \in E_2 : |SX| = r\}$.

Kruhem K se středem S a poloměrem r nazýváme množinu všech bodů $X \in E_2$, kde $|SX| \leq r$. Zapišeme $K(S; r) = \{X \in E_2 : |SX| \leq r\}$.

Def.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice.

Množinu $U_1 = \{X \in E_2 : |SX| < r\}$ nazýváme vnitřní oblastí kružnice.

Množinu $U_2 = \{X \in E_2 : |SX| > r\}$ nazýváme vnější oblastí kružnice.

Def.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice; $X_1, X_2 \in k$, $X_1 \neq X_2$.

Úsečku X_1X_2 nazýváme tětivou kružnice k , přímkou $\overline{X_1X_2}$ sečnou kružnice k . Je-li navíc $S \in X_1X_2$, nazýváme tětivu X_1X_2 průměrem.

Pozn.:

- a) Sečna má s kružnicí dva společné body.
- b) Je-li X_1X_2 průměr, platí: $|X_1X_2| = 2r$.

V.10.1.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice, X_1X_2 její tětiva, AB její průměr. Pak platí:

$$\overline{X_1X_2} \perp \overline{AB} \Rightarrow \exists O \in E_2: X_1X_2 \cap AB = \{O\} \wedge O = X_1 \dot{-} X_2.$$

- [Dk.: a) $S \in X_1X_2 \Rightarrow O = S$ - platí
 b) $S \notin X_1X_2 \Rightarrow \exists$ rovnoramenný $\triangle SX_1X_2$, kde SO je jeho výška (totiž $\triangle SOX_1 \cong \triangle SOX_2$ (Ssu)) $\Rightarrow SO$ je jeho těžnice $\Rightarrow O = X_1 \dot{-} X_2$.]

V.10.2.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice, X_1X_2 její tětiva. Pak platí:

- a) $|X_1X_2| \leq 2r$
- b) $|X_1X_2| = 2r \Leftrightarrow S \in X_1X_2$

- [Dk.: a) $S \notin X_1X_2 \Rightarrow \exists \triangle SX_1X_2$, v němž platí trojúhelníková nerovnost:
 $|X_1S| + |X_2S| > |X_1X_2|$
 $2r > |X_1X_2|$
 b) 1., $\Rightarrow$ " : $|X_1X_2| = 2r \Rightarrow X_1X_2$ je průměr $\Rightarrow S \in X_1X_2$
 2., $\Leftarrow$ " : $S \in X_1X_2 \Rightarrow X_1X_2$ je průměr $\Rightarrow |X_1X_2| = 2r$.]

Def.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice, $T \in k$. Přímkou t , pro niž platí $T \in t \wedge ST \perp t$, nazýváme tečnou kružnice s bodem dotyku T .

V.10.3.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice, t její tečna. Pak platí:

Tečna t má s kružnicí k společný právě jeden bod - bod dotyku.

[Dk.: $T \in k, T \in t \Rightarrow t \cap k \neq \emptyset$

Nechť $X \in t, X \neq T \Rightarrow \exists \Delta STX$ (pravoúhlý) s přeponou $SX \Rightarrow$

$\Rightarrow |SX| > |ST| = r \Rightarrow X$ leží ve vnější oblasti kružnice $\Rightarrow X \notin k$.]

Pozn.: Z důkazu předchozí věty je zřejmé, že každý bod $X \in t$, který není bodem dotyku, leží ve vnější oblasti kružnice.

Def.:

a) Nechť $k(S;r)$ je kružnice, AB její tětiva, která není průměrem.

Množinu $k \cap \overrightarrow{ABS}$ nazýváme větším obloukem kružnice k .

Množinu $k \cap \sigma$, kde σ je polorovina opačná k $\overrightarrow{ABS}$, nazýváme menším obloukem kružnice k s krajními body A, B .

b) Oblouk kružnice s krajními body A, B , je-li AB průměrem, nazveme polokružnicí.

Pozn.: Oblouk kružnice s krajními body A, B označujeme $\widehat{AB}$.

Aby bylo jasné, zda-li myslíme větší nebo menší oblouk, někdy označujeme $\widehat{ACB}$, kde $C \in \widehat{AB}$, $C \neq A$, $C \neq B$.

Def.: Nechť je dán oblouk $\widehat{AB}$ na kružnici $k(S;r)$.

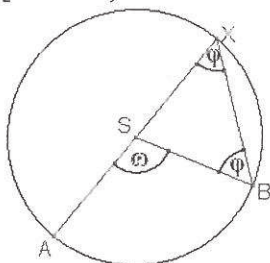
Polopřímky $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ jsou rameny dvou úhlů, z nichž právě jeden obsahuje oblouk $\widehat{AB}$.

Tento úhel nazýváme středovým úhlem příslušným oblouku $\widehat{AB}$. Každý úhel $\sphericalangle AXB$, kde $X \in k \wedge X \notin \widehat{AB}$, nazýváme obvodovým úhlem příslušným oblouku $\widehat{AB}$.

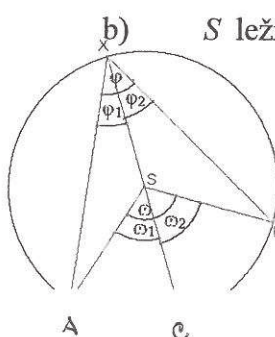
V.10.4.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice.

Pak středový úhel je dvojnásobkem libovolného obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice.

[Dk.: a) S leží na rameni obvodového úhlu:



ΔSXB - rovnoramenný se základnou $BX \Rightarrow \sphericalangle SBX = \varphi = \sphericalangle SXB$
 ω ... vnější úhel $\Delta SXB \Rightarrow \omega = \varphi + \varphi = 2\varphi$



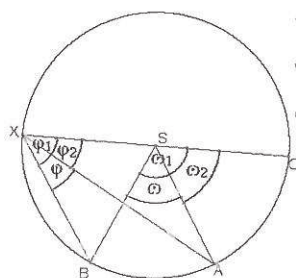
b) S leží uvnitř obvodového úhlu: označme $C \in \overrightarrow{XS} \cap k$

$$\omega_1 \stackrel{\cong}{=} 2\varphi_1 \quad \omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_2 = 2\varphi_2 \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow \omega = 2\varphi$$

c) S leží vně obvodového úhlu: označme $C \in \overrightarrow{XS} \cap k$

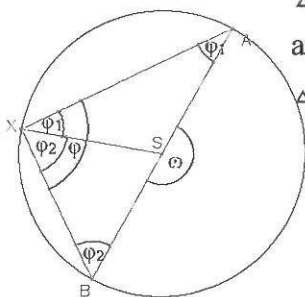


$$\omega_1 \stackrel{!}{=} 2\varphi_1 \quad \omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\omega_2 = 2\varphi_2 \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\omega_1 - \omega_2 = 2(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \omega = 2\varphi$$

d) S leží na AB :



$\triangle AXS$ - rovnoramenný se základnou $AX \Rightarrow \sphericalangle XAS = \varphi_1$,

analogicky $\sphericalangle XBS = \varphi_2$

$$\triangle ABX : 2(\varphi_1 + \varphi_2) = 180^\circ$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ = \varphi = \frac{\omega}{2} \quad]$$

V.10.5.: Každé dva obvodové úhly, příslušné témuž oblouku kružnice, jsou shodné.

[Dk.: přímý důsledek V.10.4.]

V.10.6.: **Thaletova věta:**

Každý obvodový úhel, příslušný polokružnici, je pravý.

[Dk.: důsledek V.10.4., neboť polokružnici přísluší středový úhel 180° .]

Pozn.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice, $X \in k$ pevný bod. Pak platí:

Probíhá-li bod A rovnoměrně po kružnici, tzn. otáčí-li se $\overline{SA}$ kolem bodu S konstantní úhlovou rychlostí ω , otáčí se přímka $\overline{XA}$ kolem bodu X konstantní úhlovou rychlostí $\frac{\omega}{2}$.

Def.: Necht' $\widehat{AB}$ je menší oblouk kružnice $k(S; r)$, t tečna ke kružnici k v bodě A , bod

$C \in t$, $C \in \sigma$, kde σ je polorovina opačná k $\overrightarrow{ABS}$.

Úhel $\sphericalangle CAB$ nazýváme úsekovým úhlem příslušným oblouku $\widehat{AB}$.

Pozn.: Úsekový úhel je tedy úhel, který svírá tečna s tětivou AB . Jeho velikost je tedy dána jako odchylka této tečny a tětivy.